(374) Infinitesimalrechnung:

Wie lauten die Tangenten- und die Normalengleichung und wozu brauche ich sie?

(341) Infinitesimalrechnung:

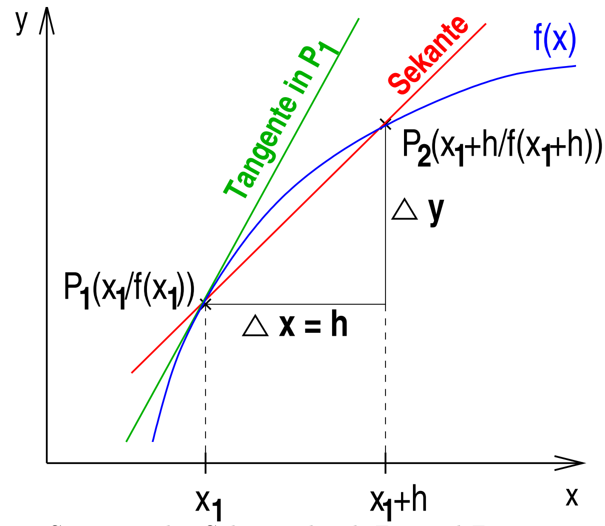
Herleitung der Steigung der Tangente an eine Kurve mit der h-Methode

(253) Infinitesimalrechnung:

Welche Begriffe werden bei der Beschreibung von Änderungsraten verwendet?

(314) Infinitesimalrechnung:

Exakte Bestimmung des Verhaltens einer Funktion $f(x)$ für $x \to x_0$, welches vom Definitionsbereich ausgeschlossen ist



Die Steigung der Sekante durch P_1 und P_2 ist:
$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{x_1+h-x_1} = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$
Dabei heißt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Differenzenquotient.

Wenn der Punkt P_2 entlang der Kurve von $f(x)$ auf den Punkt P_1 zuwandert, d.h. h geht gegen 0, dann nähert sich die Steigung der Sekante immer mehr der Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt P_1 an und erreicht sie im Grenzfall. Also:

$$m_t = \lim_{h\to 0} m_s = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \frac{dy}{dx} = f'(x_1)$$

Dabei heißt $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Differentialquotient.
lim (vom lateinischen limes) bedeutet Grenzwert.
f' ist die 1. Ableitung von f. Beim Ermitteln der Tangentensteigung für eine bestimmte Funktion besteht die Rechenkunst darin, den limes-Term so umzuformen, dass sich das h im Nenner wegkürzt.

Die Tangentengleichung erhält man, wenn man in die Punktsteigungsformel der Geradengleichung $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ die Koordinaten des Berührpunktes $(x_B/f(x_B))$ und die Steigung im Berührpunkt $f'(x_B)$ einsetzt und nach y auflöst: $y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$
Analog ergibt sich die Normalengleichung zu
$y = -\frac{1}{f'(x_B)}(x - x_B) + f(x_B)$

1. Typ: Gegeben ist eine Funktion $f(x)$. Wie lautet die Gleichung ihrer Tangente an der Stelle x_B?
Berechne $f(x_B)$. Leite $f(x)$ ab und berechne $f'(x_B)$. Setze alle Werte in die Tangentengleichung ein und vereinfache den Funktionsterm.

2. Typ: Gegeben ist eine Funktion $f(x)$ und ein Punkt $P(x_P/y_P)$, der nicht auf dem Schaubild der Funktion liegt. Berechne die Gleichung(en) der Tangente(n), die sich von P an das Schaubild der Funktion legen lassen.
Nimm den x-Wert des unbekannten Berührpunktes als Variable x_B. Dann ist der y-Wert des Berührpunktes $f(x_B)$. Leite $f(x)$ ab und setze x_B in $f'(x)$ ein. Da der Punkt P auch auf der Tangente liegen muss, können seine Koordinaten in der Tangentengleichung für x und y eingesetzt werden. Damit erhältst Du eine Gleichung mit der einen Unbekannten x_B. Die Lösung(en) für x_B setzt Du dann in die Tangentenfornel ein.
Analog lassen sich bei Verwendung der Normalengleichung die Normalen in einem Kurvenpunkt berechnen oder von einem Punkt, der nicht auf der Kurve liegt, die Normale(n) an die Kurve legen.

Den Grenzwert einer gebrochenrationalen Funktion für $x \to x_0$, wobei x_0 in der Definitionsmenge ausgeschlossen ist, kannst Du folgendermaßen bestimmen:

Das direkte Einsetzen dieses Zahlenwertes x_0 in die Funktionsgleichung geht nicht, da dabei der Nenner 0 wird, was ja nicht erlaubt ist.

Deshalb wird x durch eine Folge a_n ersetzt, die für $n \to \infty$ den verbotenen Zahlenwert x_0 als Grenzwert hat. Damit wird die Bestimmung des Grenzwertes für $x \to x_0$ durch die Bestimmung des Grenzwertes für $n \to \infty$ ersetzt.

In der Praxis benötigt man zwei solcher Folgen und zwar eine, die sich dem Zahlenwert x_0 von links ($a_n = x_0 - \frac{1}{n}$) annähert und eine, die sich von rechts ($a_n = x_0 + \frac{1}{n}$) annähert.

Zur Bestimmung des Grenzwertes der Funktion für $x \to x_0$ wird in der Funktionsgleichung jedes Vorkommen von x durch $x_0 - \frac{1}{n}$ bzw. $x_0 + \frac{1}{n}$ ersetzt und von der resultierenden Gleichung der Grenzwert für $n \to \infty$ bestimmt.

Beispiel zur Bestimmung des linkseitigen Grenzwertes:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}+3}{2-\frac{1}{n}-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -\infty$$

Mittlere Änderungsrate:

- in einem bestimmten Intervall $[x_1; x_2] = [x; x+h]$
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Differenzenquotient
- Sekantensteigung

Momentane Änderungsrate:

- an einer bestimmten Stelle x
- $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- 1. Ableitung von $f(x)$
- Differentialquotient
- Tangentensteigung