Besonderheiten bei gebrochenrationalen Funktionen (356)

Definition:

Eine gebrochenrationale Funktion liegt dann vor, wenn die Variable $\mathbf{x}$ im Nenner auftritt.

Allgemeine Form:

$\mathbf{f(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots}$ d.h. $\mathbf{f(x)} = \frac{\text{ganzrationale Funktion}}{\text{ganzrationale Funktion}}$

oder auch $\mathbf{f(x)} = \textbf{ganzrationale Funktion} + \frac{\text{ganzrationale Funktion}}{\text{ganzrationale Funktion}}$

oder auch $\mathbf{f(x)} = \mathbf{a} \cdot \frac{(x-n_1)(x-n_2)\ldots}{(x-d_1)(x-d_2)\ldots}$ mit den Nullstellen $\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots$
und den Definitionslücken $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \ldots$

Definitionsbereich:

Bei einer gebrochenrationalen Funktion **kann** der Definitionsbereich eingeschränkt sein. Da die Variable $\mathbf{x}$ im Nenner steht, kann der Nenner für bestimmte $\mathbf{x}$-Werte $\mathbf{0}$ werden, und durch $\mathbf{0}$ darf bekanntlich nicht dividiert werden. Diese $\mathbf{x}$-Werte sind also vom Definitionsbereich auszuschließen. Man erhält sie, indem man den (oder die) Nenner gleich $\mathbf{0}$ setzt und die entstehende Gleichung(en) nach $\mathbf{x}$ auflöst. Die Bestimmung der Definitionslücken wird übersichtlich, wenn man den (oder die) Nenner faktorisiert, also als Produkt schreibt und dann den Satz vom Nullprodukt anwendet, d.h. die einzelnen Faktoren gleich $\mathbf{0}$ setzt.

Zwei einfache Beispiele: $\mathbf{f(x)} = \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x+3)(x-3)}$ $\quad \mathbf{D_f} = \mathcal{R} \setminus \{-3; 3\}$ $\qquad \mathbf{f(x)} = \frac{1}{x^2+9}$ $\quad \mathbf{D_f} = \mathcal{R}$

Verhalten der Funktion an den Definitionslücken:

Zur Bestimmung des Verhaltens muss zunächst geprüft werden, ob der Zähler für den x-Wert der Definitonslücke ebenfalls $\mathbf{0}$ wird. Ist das der Fall, dann kann mit dem für diese Definitionslücke verantwortlichen Faktor gekürzt werden. Jetzt gibt es **2 Möglichkeiten**:

1. Dieser Faktor ist nach dem Kürzen **im Nenner** verschwunden. Es liegt eine **hebbare Lücke** vor, z.B. $\mathbf{f(x)} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}$. $\mathbf{D_f} = \mathcal{R} \setminus \{-1; 1\}$ bzw. nach dem Kürzen $\mathbf{D_f} = \mathcal{R} \setminus \{-1\}$.

   Bei der gekürzten Funktion hat sich der Definitionsbereich geändert, da eine Definitionslücke weggefallen ist. Die ursprüngliche gebrochenrationale Funktion ist mit der gekürzten Funktion identisch bis auf eine Unterbrechung im Funktionsverlauf an der Stelle der Definitionslücke. Diese Lücke wird im Schaubild durch ein kleines Quadrat symbolisiert.

2. Dieser Faktor ist nach dem Kürzen immer noch **im Nenner** vorhanden oder es konnte gar nicht gekürzt werden, da der Zähler für den x-Wert der Definitionslücke gar nicht $\mathbf{0}$ wird.
   Es liegt eine **Polstelle** vor.

   Das Schaubild hat an der Stelle der Definitionslücke $\mathbf{d}$ eine **senkrechte Asymptote** mit der Gleichung $\mathbf{x = d}$. Asymptote heißt "nicht zusammenfallend". Gemeint ist damit eine Gerade, der sich eine ins Unendliche verlaufende Kurve annähert ohne sie zu erreichen. Der Funktionswert geht bei der Annäherung des x-Wertes an die Definitionslücke gegen $+$ oder $-\infty$. Dabei unterscheidet man zwischen

   (a) **Polstelle mit Vorzeichenwechsel**

   Der Funktionswert geht bei der Annäherung an die Definitionslücke $\mathbf{x = d}$ auf der einen Seite nach $+\infty$ und auf der anderen Seite nach $-\infty$.

   Der für diese Polstelle verantwortliche Faktor im Nenner tritt (nach dem eventuell möglichen Kürzen) als eine **Potenz mit einer ungeraden Hochzahl** auf.

   (b) **Polstelle ohne Vorzeichenwechsel**

   Der Funktionswert geht bei der Annäherung an die Definitionslücke $\mathbf{x = d}$ auf beiden Seiten nach $+\infty$ oder auf beiden Seiten nach $-\infty$.

   Der für diese Polstelle verantwortliche Faktor im Nenner tritt (nach dem eventuell möglichen Kürzen) als eine **Potenz mit einer geraden Hochzahl** auf.

Verhalten der Funktion für $\mathbf{x \to \pm\infty}$ (andere Schreibweise: $|\mathbf{x}| \to \infty$):

Wichtig ist hier die Frage nach **waagerechten Asymptoten** (die schiefen Asymptoten sind nicht mehr prüfungsrelevant!) und **Grenzwerten**. Zur Beurteilung des Verhaltens müssen **(nach dem Ausmultiplizieren von Zähler und Nenner!)** die Terme mit der jeweils höchsten Potenz in Zähler und Nenner, also $\mathbf{a_n x^n}$ und $\mathbf{b_m x^m}$ herangezogen werden. Man unterscheidet **3 Fälle**:

1. $\mathbf{n < m}$

   Mit betragsmäßig größer werdendem $\mathbf{x}$ wächst der Nenner schneller als der Zähler. Der Funktionswert nähert sich deshalb beliebig nahe der Zahl $\mathbf{0}$, erreicht sie aber nicht. Die **x-Achse** (Gleichung $\mathbf{y = 0}$) ist damit eine **waagerechte Asymptote** der Funktion.
   Damit existiert auch ein Grenzwert: Für $\mathbf{x \to \pm\infty}$ geht $\mathbf{f(x) \to 0}$.

2. $\mathbf{n = m}$

   Mit betragsmäßig größer werdendem $\mathbf{x}$ wachsen Nenner und Zähler im Verhältnis gleich schnell. Der Funktionswert nähert sich deshalb beliebig nahe dem Quotienten aus den beiden Vorzahlen $\mathbf{\frac{a_n}{b_m}}$, erreicht ihn aber nicht. Die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $\mathbf{y = \frac{a_n}{b_m}}$ ist damit eine **waagerechte Asymptote** der Funktion.
   Damit existiert auch ein Grenzwert: Für $\mathbf{x \to \pm\infty}$ geht $\mathbf{f(x) \to \frac{a_n}{b_m}}$.

3. $\mathbf{n > m}$

   Mit betragsmäßig größer werdendem $\mathbf{x}$ wächst der Zähler schneller als der Nenner. Der Funktionswert geht deshalb gegen $+$ oder $-\infty$. In diesem Fall gibt es keine waagerechte Asymptote.
   Hier existiert also auch kein Grenzwert: Für $\mathbf{x \to \pm\infty}$ geht $\mathbf{f(x) \to +\infty}$ oder $-\infty$.
   Das Vorzeichen von ∞ ist abhängig von $\mathbf{n, m, a_n}$ und $\mathbf{b_m}$.

Zur mathematisch korrekten Bestimmung des Grenzwertes hilft ausgehend von der ursprünglichen Funktion folgendes Verfahren: Erweitere Zähler und Nenner nach dem Ausmultiplizieren mit dem Kehrwert der höchsten in der gesamten Funktion vorkommenden Potenz von x. Bilde von der so erhaltenen Funktion den **limes** für $\mathbf{x \to \pm\infty}$ unter Anwendung der Grenzwertsätze.

Beispiel: $\mathbf{f(x) = \frac{6x^4+5x^2-2x+1}{6x-2x^4+8} = \frac{6x^4+5x^2-2x+1}{6x-2x^4+8} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{6+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{6}{x^3}-2+\frac{8}{x^4}}}$

$$\lim_{\mathbf{x \to \pm\infty}} \mathbf{\frac{6+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{6}{x^3}-2+\frac{8}{x^4}} = \frac{6+0-0+0}{0-2+0} = -3}$$

Anfertigung einer Skizze

1. Zeichne alle vorhandenen Asymptoten und hebbaren Lücken ein.
2. Bestimme gegebenenfalls die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichne sie ein.
   x-Achse: **Zähler = 0** setzen und die Gleichung nach $\mathbf{x}$ auflösen. **y-Achse**: $\mathbf{f(0)}$ berechnen.
3. Bestimme für alle Polstellen das Vorzeichen des Funktionswertes, indem Du einen Wert, der etwas größer als die Definitionslücke ist und einen Wert, der etwas kleiner als die Definitionslücke ist, in die Funktionsgleichung einsetzt und eine Vorzeichenbetrachtung vornimmst. Alternativ kann nach der Bestimmung des Vorzeichens auf der einen Seite der Polstelle auch die Potenz (gerade = ohne Vorzeichenwechsel, ungerade = mit Vorzeichenwechsel) des dafür verantwortlichen Faktors im Nenner für die Bestimmung des Vorzeichens auf der anderen Seite der Polstelle verwendet werden.

   Beispiel: $\mathbf{f(x) = \frac{12(x-2)^2(x-1)}{(x-4)^2(x+3)(x-1)}}$ $\mathbf{D_f = R \setminus \{-3; 1; 4\}}$; hebbare Lücke bei $\mathbf{x = 1}$;
   Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $\mathbf{x = -3}$ mit senkrechter Asymptote $\mathbf{x = -3}$;
   Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $\mathbf{x = 4}$ mit senkrechter Asymptote $\mathbf{x = 4}$;
   doppelte Nullstelle (= Extremstelle!) bei $\mathbf{x = 2}$; $\mathbf{f(0) = 1}$.

   Die höchste Potenz (ausmultiplizieren!) im Zähler ist $\mathbf{2}$, die höchste Potenz im Nenner ist $\mathbf{3}$, also ist die x-Achse eine waagerechte Asymptote.

   Vorzeichen von $\mathbf{f(x)}$ für $\mathbf{x = -3,1}$: $\mathbf{x-2 < 0}$, $\mathbf{(x-4)^2 > 0}$, $\mathbf{(x+3) < 0}$, also $\mathbf{f(-3,1)}$ negativ.

   Vorzeichen von $\mathbf{f(x)}$ für $\mathbf{x = -2,9}$: $\mathbf{x-2 < 0}$, $\mathbf{(x-4)^2 > 0}$, $\mathbf{(x+3) > 0}$, also $\mathbf{f(-2,9)}$ positiv.

   Vorzeichen von $\mathbf{f(x)}$ für $\mathbf{x = 3,9}$: $\mathbf{x-2 > 0}$, $\mathbf{(x-4)^2 > 0}$, $\mathbf{(x+3) > 0}$, also $\mathbf{f(3,9)}$ positiv.

   Vorzeichen von $\mathbf{f(x)}$ für $\mathbf{x = 4,1}$: $\mathbf{x-2 > 0}$, $\mathbf{(x-4)^2 > 0}$, $\mathbf{(x+3) > 0}$, also $\mathbf{f(4,1)}$ positiv.
4. Skizziere das Schaubild.