(377) Infinitesimalrechnung:

Worin unterscheiden sich Stammfunktionen und Integralfunktionen?

2011-02-19

(391) Infinitesimalrechnung:

Wie berechne ich das Volumen eines Rotationskörpers?

2014-02-18

(392) Infinitesimalrechnung:

Wie berechnest Du Flächen, die ins Unendliche reichen, mit Hilfe von uneigentlichen Integralen?

2016-02-03

(393) Infinitesimalrechnung:

Wie lautet der Mittelwertsatz der Integralrechnung?

2014-02-28

Rotiert die Fläche unter dem Graphen einer im Intervall [a; b] differenzierbaren Funktion um die x-Achse, so ergibt sich das Volumen des entstehenden Rotationskörpers zu:

$\mathbf{V} = \pi \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\mathbf{f(x)})^{\mathbf{2}} \mathbf{dx}$

Man denkt sich den Rotationskörper aus sehr vielen ganz dünnen Zylinderscheiben zusammengesetzt, die den Radius $\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und die Höhe $\mathbf{h} = \mathbf{dx}$ haben, also Summe über alle $\mathbf{V} = \pi \mathbf{r}^{\mathbf{2}} \mathbf{h} = \pi(\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{\mathbf{2}} \mathbf{dx}$.

Achtung:
Soll das Volumen eines Hohlkörpers berechnet werden, dessen Außen- und Innenwand von je einem Graphen beschrieben werden, so müssen die beiden Volumina des massiven Körpers und des Hohlraumes separat berechnet und dann erst voneinander subtrahiert werden. Falls der Hohlkörper einen Boden besitzt, sind auch noch die geänderten Integrationsgrenzen des Hohlraumes zu beachten.

- Eine Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ hat unendlich viele Stammfunktionen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}$. Die einzelnen Stammfunktionen haben alle dieselbe Form, sind aber in Abhängigkeit von der Konstanten $\mathbf{C}$ in Richtung der y-Achse gegeneinander verschoben.
- Eine Stammfunktion kann durch jeden beliebigen Punkt des Koordinatensystems gehen, der nicht durch Einschränkungen in der Definitionsmenge ausgeschlossen ist. Die Konstante $\mathbf{C}$ kann durch Punktprobe ermittelt werden.
- Bei einer Integralfunktion ist die untere Integrationsgrenze auf einen bestimmten Wert $\mathbf{a}$ festgelegt, während die obere Integrationsgrenze $\mathbf{x}$ unter Beachtung der Definitionsmenge alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann. Um Namenskonflikte zu vermeiden, wird bei der Angabe der zugrundeliegenden Funktion $\mathbf{f}$ deren Variable von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{t}$ umbenannt:
  $\mathbf{I_a}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\, \mathbf{dt} = [\mathbf{F}(\mathbf{t})]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})$
- Aus dieser Definition wird klar, dass eine Integralfunktion zumindest an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ eine Nullstelle haben muss.
- Jede Integralfunktion $\mathbf{I_a}(\mathbf{x})$ ist also eine Stammfunktion von $\mathbf{f}(\mathbf{t})$. Die einzelnen Integralfunktionen sind in Abhängigkeit von $\mathbf{a}$ in y-Achsen-Richtung gegeneinander verschoben.
- Nur die Stammfunktion ist auch eine Integralfunktion, die mindestens eine Nullstelle hat. $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}$ ist z.B. keine Integralfunktion.

Bei einer Funktion verändert sich der Funktionswert $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit fortschreitendem **x-Wert** nach der im Funktionsterm festgelegten Gesetzmäßigkeit. Von Interesse ist nun oft der mittlere Funktionswert $\overline{\mathbf{m}}$ der Funktion in einem bestimmten Intervall $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$. Dieser Mittelwert berechnet sich nach der Formel:

$$\overline{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b-a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}$$

Dies ist die Weiterentwicklung der einfachen Berechnungsformel für den Notendurchschnitt: Addiere alle Noten der Klassenarbeit (= Integral) und dividiere durch die Anzahl der Klassenarbeiten (b-a).

Als geometrische Herleitung kann man sich vorstellen, dass die Fläche (genaugenommen das Integral!) zwischen dem Graphen von $\mathbf{f(x)}$ und der **x-Achse** im Intervall $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ durch ein flächengleiches Rechteck der Breite $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ und der Höhe $\overline{\mathbf{m}}$ (genaugenommen $|\overline{\mathbf{m}}|$) ersetzt wird, also

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \overline{\mathbf{m}} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}$$

Auflösen nach $\overline{\mathbf{m}}$ ergibt die obige Formel.

Es gibt Flächen, die ins Unendliche reichen. Dies ist dann der Fall, wenn sich der Graph einer Funktion an eine Asymptote annähert, die Fläche also in einer Richtung ins Unendliche geht.
Zur Berechnung solcher Flächen verwendet man sogenannte **uneigenliche Integrale**.

Bei der Annäherung an eine waagerechte oder schiefe Asymptote geht die eine Integrationsgrenze gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Da man mit ∞ nicht rechnen kann, ersetzt man ∞ durch eine Variable $\mathbf{z}$ und berechnet die Fläche in Abhängigkeit von dieser Variablen. Danach bestimmt man den Grenzwert dieser Fläche für $\mathbf{z} \to +\infty$ bzw. $\mathbf{z} \to -\infty$, also

$$\lim_{\mathbf{z}\to+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \quad \mathbf{bzw.} \quad \lim_{\mathbf{z}\to-\infty} \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

Bei der Annäherung an eine senkrechte Asymptote $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ kann man den Zahlenwert $\mathbf{a}$ nicht als Integrationsgrenze verwenden, da er beim Einsetzen in die Stammfunktion zu einer nicht erlaubten Rechenoperation führt (die Funktion ist an dieser Stelle ja nicht definiert). Deshalb berechnet man die Fläche in Abhängigkeit von $\mathbf{z}$. Danach bestimmt man den Grenzwert dieser Fläche für $\mathbf{z} \to \mathbf{a}$ (in der Praxis meist $\mathbf{z} \to \mathbf{0}$), also

$$\lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{a}} \mathbf{A}(\mathbf{z})$$