(030) Potenzen, Wurzeln, Logarithmen:

Wie werden Potenzen multipliziert bzw. dividiert?

© PRISMA-Lernhilfe
Dr. Martin Spohn, Reutlingen 2004-2018.
Alle Rechte vorbehalten.
http://www.prisma-lernhilfe.de
2008-10-23

(031) Potenzen, Wurzeln, Logarithmen:

Wie werden Potenzen potenziert bzw. radiziert?

© PRISMA-Lernhilfe
Dr. Martin Spohn, Reutlingen 2004-2018.
Alle Rechte vorbehalten.
http://www.prisma-lernhilfe.de
2009-01-29

(115) Potenzen, Wurzeln, Logarithmen:

Wie lauten die Rechengesetze für Logarithmen?

© PRISMA-Lernhilfe
Dr. Martin Spohn, Reutlingen 2004-2018.
Alle Rechte vorbehalten.
http://www.prisma-lernhilfe.de
2014-04-06

(370) Rechengesetze:

Wozu brauche ich Termumformungen?

© PRISMA-Lernhilfe
Dr. Martin Spohn, Reutlingen 2004-2018.
Alle Rechte vorbehalten.
http://www.prisma-lernhilfe.de
2010-08-07

Man potenziert eine Potenz, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert, z.B.
$(\mathbf{a^p})^{\mathbf{q}} = \mathbf{a^{p \cdot q}}$; $(\mathbf{3^3})^{\mathbf{2}} = \mathbf{3^{3 \cdot 2}} = \mathbf{3^6}$

Eine Potenz wird radiziert, indem man zuerst die Potenz berechnet und dann aus dem Ergebnis die Wurzel zieht **oder** indem man zuerst die Wurzel aus der Basis zieht und das Ergebnis mit dem Exponenten der Basis potenziert, z.B.
$\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^x}} = (\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}})^{\mathbf{x}}$

Wenn man den Potenzexponenten und den Wurzelexponenten durch die gleiche Zahl teilt bzw. mit der gleichen Zahl multipliziert, so ändert sich am Wert der Wurzel nichts (deshalb muss $\mathbf{a \geq 0}$ sein!):
$\sqrt[\mathbf{bn}]{\mathbf{a^{bx}}} = \sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^x}}$

Teilt man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten selbst, so ergibt sich ein gebrochener Exponent: $\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^m}} = \mathbf{a^{\frac{m}{n}}}$
Das Potenzieren einer Zahl mit einem Bruch bedeutet also: Die Zahl ist mit dem Zähler des Bruches zu potenzieren und mit dem Nenner des Bruches zu radizieren.

1. Potenzen mit gleicher Basis
Potenzen mit gleicher Grundzahl werden multipliziert, indem man die Grundzahl beibehält und die Hochzahlen addiert. z.B.
$\mathbf{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$; $\mathbf{3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5}$

Potenzen mit gleicher Grundzahl werden dividiert, indem man die Grundzahl beibehält und die Hochzahlen subtrahiert. z.B.
$\frac{\mathbf{a^p}}{\mathbf{a^q}} = \mathbf{a^{p-q}}$; $\mathbf{a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3}$;
$\mathbf{x^4 : x^6 = x^{4-6} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}}$

2. Potenzen mit gleichem Exponenten
Potenzen mit gleicher Hochzahl werden multipliziert, indem man die Grundzahlen multipliziert und die Hochzahl beibehält. z.B.
$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$; $\mathbf{3^3 \cdot 5^3 = (3 \cdot 5)^3 = 15^3}$
Potenzen mit gleicher Hochzahl werden dividiert, indem man die Grundzahlen dividiert und die Hochzahl beibehält. z.B.
$\frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}} = (\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})^{\mathbf{n}}$; $\frac{\mathbf{12^2}}{\mathbf{4^2}} = (\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{4}})^{\mathbf{2}} = \mathbf{3^2} = \mathbf{9}$

Diese Gesetze gelten auch für gebrochene Hochzahlen, also auch für Wurzeln!

Termumformungen benötigst Du zur

- Vereinfachung von Termen
- Ausnutzung von Rechenvorteilen sowohl beim schriftlichen Rechnen als auch beim Kopfrechnen
- Umwandlung einer Summe in ein Produkt (um z.B. den Satz vom Nullprodukt anwenden zu können)
- Umwandlung eines Produkts (oder eines Quotienten) in eine Summe (um z.B. die komplizierteren Ableitungsregeln zu umgehen)
- Umwandlung von Wurzeln in Potenzschreibweise
- Umwandlung von Potenzen mit negativen Hochzahlen in Potenzen mit positiven Hochzahlen oder umgekehrt
- Auflösung von Gleichungen nach der gesuchten Unbekannten, indem Du auf beiden Seiten der Gleichung dieselben Termumformungen (Äquivalenzumformungen) vornimmst

Logarithmensatz	**entspricht Potenzsatz**
$\log_{\mathbf{b}}(\mathbf{u \cdot v}) = \log_{\mathbf{b}}(\mathbf{u}) + \log_{\mathbf{b}}(\mathbf{v})$	$\mathbf{b^u \cdot b^v = b^{u+v}}$
$\log_{\mathbf{b}}(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}) = \log_{\mathbf{b}}(\mathbf{u}) - \log_{\mathbf{b}}(\mathbf{v})$	$\frac{\mathbf{b^u}}{\mathbf{b^v}} = \mathbf{b^{u-v}}$
$\log_{\mathbf{b}}(\mathbf{u^v}) = \mathbf{v} \cdot \log_{\mathbf{b}}(\mathbf{u})$	$(\mathbf{b^u})^{\mathbf{v}} = \mathbf{b^{u \cdot v}}$
$\log_{\mathbf{b}}(\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{u}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \cdot \log_{\mathbf{b}}(\mathbf{u})$	$\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{u}} = \mathbf{u^{\frac{1}{n}}}$
	$(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{R}^+)$