(024) Vektoren:

Wie lauten die vektoriellen Darstellungen von Punkt, Gerade, Ebene und Raum?

(023) Vektoren:

Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede gibt es bei den zwei Darstellungen von Geradengleichungen?
$\mathbf{y = mx + c}$ **und** $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{p}} + \mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{u}}$

(214) Vektoren:

Was sind Vektoren?

(215) Vektoren:

Welche Rechengesetze gelten bei Vektoren?

$\mathbf{y = mx + c}$
$\mathbf{m}$ ist die Steigung und $\mathbf{c}$ ist der y-Achsenabschnitt.

$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{p}} + \mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{u}} \quad \mathbf{t} \in \Re$
$\vec{\mathbf{p}}$ ist ein Stützvektor und $\vec{\mathbf{u}}$ ($\vec{u} \neq \vec{o}$) ist ein Richtungsvektor von $\mathbf{g}$

Die 1. Darstellung eignet sich nur für Geraden in der Ebene. In gewisser Weise entspricht der y-Achsenabschnitt dem Stützvektor und die Steigung dem Richtungsvektor.

In der 1. Darstellung gibt es für jede Gerade genau eine Gleichung mit einem bestimmten $\mathbf{m}$ und einem bestimmten $\mathbf{c}$.

In der 2. Darstellung gibt es für jede Gerade beliebig viele Darstellungsmöglichkeiten, da jeder Punkt der Geraden als Stützvektor und jeder Verbindungsvektor zwischen zwei verschiedenen beliebigen Punkten der Geraden als Richtungsvektor genommen werden kann.

Die 2. Darstellung ist auch für den dreidimensionalen Raum (und höherdimensionale Räume) anwendbar.

Die 2. Darstellung ähnelt der Darstellung der Ebenengleichung $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{p}} + \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ und lässt sich vorteilhaft bei Vergleichen von Geraden mit Ebenen einsetzen.

Ein Punkt im Raum wird durch seinen Ortsvektor $\vec{\mathbf{p}}$ beschrieben:

$$\vec{\mathbf{OP}} = \vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Eine Gerade wird durch einen Stützvektor $\vec{\mathbf{p}}$ und einen Richtungsvektor $\vec{\mathbf{u}}$ beschrieben:

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Eine Ebene wird durch einen Stützvektor $\vec{\mathbf{p}}$ und zwei linear unabhängige Spannvektoren $\vec{\mathbf{u}}$ und $\vec{\mathbf{v}}$ beschrieben:

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mathbf{s} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Der komplette dreidimensionale Raum wird durch die Kombination von 3 Vektoren $\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}$, $\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}$ und $\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{3}$ beschrieben, die linear unabhängig voneinander sind:

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{a} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} + \mathbf{b} \cdot \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} + \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}$$

Für alle Elemente $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ eines Vektorraumes und alle reelle Zahlen $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ gilt:

Kommutativgesetz:
$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$

Assoziativgesetze:
$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}} = (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$
$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{a}}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) \cdot \vec{\mathbf{a}}$

Distributivgesetze:
$\mathbf{r} \cdot (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{b}}$
$(\mathbf{r} + \mathbf{s}) \cdot \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{a}}$

Einen Ausdruck der Art
$\mathbf{r_1} \cdot \vec{\mathbf{a_1}} + \mathbf{r_2} \cdot \vec{\mathbf{a_2}} + \ldots + \mathbf{r_n} \cdot \vec{\mathbf{a_n}}$ $(\mathbf{n} \in \mathcal{N})$
nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{\mathbf{a_1}}, \vec{\mathbf{a_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{a_n}}$. Die reellen Zahlen $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \ldots, \mathbf{r_n}$ heißen **Koeffizienten**.

Vektoren sind gerichtete Größen, d.h. sie haben eine **Richtung** und einen **Betrag**.

Sie treten als **Vektorschar** auf. Meist wird aber nur ein "Pfeil" als Vertreter der betreffenden Vektorschar gezeichnet. Der Vektor der Schar, der im Koordinatenursprung beginnt, heißt Ortsvektor.

In der Geometrie bewirkt die Anwendung eines Vektors eine **Verschiebung** eines Punktes oder eines Objektes.

Die Vektoren werden mit kleinen Buchstaben mit darüberliegendem Pfeil geschrieben, z.B. $\vec{\mathbf{a}}$.

Die Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ sind gleich ($\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$), wenn die Pfeile von $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ **zueinander parallel**, **gleich lang** und **gleich gerichtet** sind.

Sind die Pfeile zweier Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ zueinander parallel und gleich lang, aber entgegengesetzt gerichtet, so heißt $\vec{\mathbf{a}}$ **Gegenvektor** zu $\vec{\mathbf{b}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ **Gegenvektor** zu $\vec{\mathbf{a}}$ und es gilt:
$\vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{b}}$ und $\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{a}}$

Ein Vektor $\vec{\mathbf{a}}$ im dreidimensionalen Vektorraum, dessen Anfang im Ursprung $\mathbf{O}$ $(\mathbf{0/0/0})$ liegt und dessen Spitze die Koordinaten $\mathbf{A}$ $(\mathbf{a_1/a_2/a_3})$ hat, wird folgendermaßen beschrieben:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$