(240) Vektoren:

Wie berechne ich das Vektorprodukt?

2008-10-10

(241) Vektoren:

Wie ist die Orthogonalität von Geraden und Ebenen definiert?

2005-11-05

(242) Vektoren:

Wie bestimme ich Spurpunkte und Spurgeraden?

2014-04-04

(316) Vektoren:

Beispielrechnung für die Methode des geschlossenen Vektorzuges

2007-01-27

- **Zwei Geraden** heißen zueinander orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren zueinander orthogonal sind.
- **Eine Gerade und eine Ebene** heißen zueinander orthogonal, wenn ein Richtungsvektor der Gerade zu den Spannvektoren der Ebene orthogonal ist.
- **Zwei Ebenen** sind zueinander orthogonal, wenn ihre Normalenvektoren zueinander orthogonal sind.

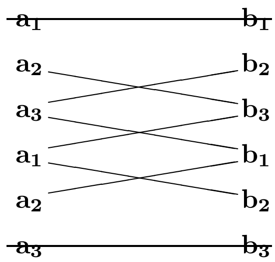
Das Vektorprodukt ist nur für Vektoren im $\mathcal{R}^{\mathbf{3}}$ definiert!

Für die Vektoren $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

heißt $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

das **Vektorprodukt** von $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ (lies: "$\vec{\mathbf{a}}$ Kreuz $\vec{\mathbf{b}}$").

Das folgende Schaubild dient als Eselsbrücke zur Berechnung des Vektorproduktes:

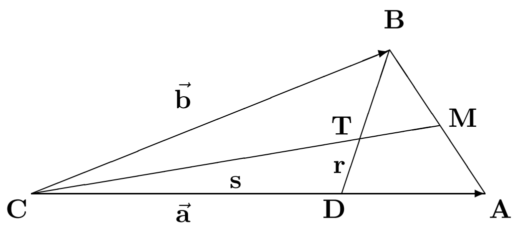


$\mathbf{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2}$

$\mathbf{a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3}$

$\mathbf{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$

In welchem Verhältnis teilt die Strecke $\overline{\mathbf{CM}}$ die Strecke $\overline{\mathbf{BD}}$, wenn das Verhältnis $\overline{\mathbf{CT}} : \overline{\mathbf{TM}} = \mathbf{3} : \mathbf{1}$ und $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathbf{AB}}$ ist?



- Wahl der Variablen: $\vec{\mathbf{DT}} = \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{DB}}$
  $\vec{\mathbf{CD}} = \mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{CA}} = \mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{a}}$
- Wahl des geschlossenen Vektorzuges:
  $\vec{\mathbf{CD}} + \vec{\mathbf{DT}} + \vec{\mathbf{TC}} = \vec{\mathbf{o}}$
- Beschreibung der Teilvektoren mit Hilfe der gegebenen Vektoren:
  $\vec{\mathbf{CD}} = \mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{a}}$
  $\vec{\mathbf{DT}} = \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{DB}} = \mathbf{r} \cdot (-\mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$
  $\vec{\mathbf{TC}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot \vec{\mathbf{MC}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot (\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(-\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) - \vec{\mathbf{b}})$
- Vereinfacht und in die Gleichung eingesetzt:
  $\mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{a}} - \mathbf{rs}\vec{\mathbf{a}} + \mathbf{r}\vec{\mathbf{b}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\vec{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}$
  $(\mathbf{s} - \mathbf{rs} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}})\vec{\mathbf{a}} + (\mathbf{r} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}})\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}$
- Da $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ linear unabhängig sind, gilt:
  $\mathbf{s} - \mathbf{rs} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{r} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} = \mathbf{0}$; $\quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$; $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$
- Damit ist das Verhältnis $\overline{\mathbf{DT}} : \overline{\mathbf{TB}} = \mathbf{3} : \mathbf{5}$

Spurpunkte von Geraden
heißen die Schnittpunkte einer Geraden mit den von je zwei Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen. Ist eine Gerade parallel zu einer Koordinatenebene, hat sie nur 2 Spurpunkte bzw. nur 1, wenn sie auch noch zu einer Koordinatenachse parallel ist.

Bestimmung der Spurpunkte einer Geraden:
Der Spurpunkt $\mathbf{S_{12}}$ der Geraden

$\mathbf{g} : \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

hat die Koordinate $\mathbf{x_3 = 0}$. Hieraus folgt: $\mathbf{1 - t = 0}$, also $\mathbf{t = 1}$ und man erhält $\mathbf{S_{12}(3/4/0)}$.
Analog erhält man $\mathbf{S_{13}(-3/0/2)}$ und $\mathbf{S_{23}(0/2/1)}$.

Spurpunkte von Ebenen
heißen die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen. Ist eine Ebene parallel zu einer Koordinatenachse, hat sie nur 2 Spurpunkte; ist sie parallel zu zwei Koordinatenachsen, hat sie nur 1 Spurpunkt. Die Geraden durch je 2 der Spurpunkte einer Ebene heißen **Spurgeraden der Ebene**.

Bestimmung der Spurpunkte einer Ebene:
Setze in der Koordinatengleichung immer für 2 der x-Werte 0 ein und berechne die übrige x-Koordinate.
$\mathbf{E : 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12}$ hat die Spurpunkte $\mathbf{S_1(4/0/0)}$, $\mathbf{S_2(0/3/0)}$ und $\mathbf{S_3(0/0/2)}$.
Die Gleichung der Spurgeraden $\mathbf{s_{12}}$ ergibt sich z.B. aus den Koordinaten der Punkte $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ zu:

$$\mathbf{s_{12}} = \vec{\mathbf{OS_1}} + \mathbf{t} \cdot (\vec{\mathbf{S_1S_2}}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$