(315) Vektoren:

Was muss ich bei der Bestimmung von Teilstreckenverhältnissen mit Hilfe des geschlossenen Vektorzuges beachten?

(350) Vektoren:

Wie berechne ich den Flächeninhalt eines Parallelogramms und wie das Spatprodukt?

(351) Vektoren:

Wie lautet die Achsenabschnittsform einer Ebene und wozu braucht man sie?

(352) Vektoren:

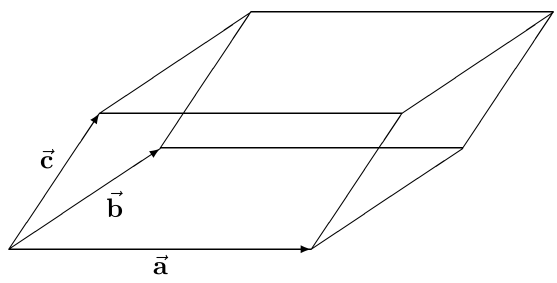
Wie berechne ich den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene?

Für die Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ und $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ im $\mathcal{R}^{\mathbf{3}}$ gilt:

1. $\vec{\mathbf{c}}$ ist orthogonal zu $\vec{\mathbf{a}}$ und zu $\vec{\mathbf{b}}$.
   Damit lässt sich ein zu zwei gegebenen Vektoren orthogonaler Vektor einfach berechnen!
2. $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ und $\vec{\mathbf{c}}$ bilden ein "Rechtssystem".
   $\vec{\mathbf{a}}$ zeigt in die Richtung des Daumens, $\vec{\mathbf{b}}$ zeigt in die Richtung des Zeigefingers und $\vec{\mathbf{c}}$ zeigt in die Richtung des Mittelfingers der rechten Hand.
3. Der Betrag von $\vec{\mathbf{c}}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ aufgespannten Parallelogramms:
   $|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}| \cdot \sin(\varphi)$

Der von den drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ und $\vec{\mathbf{c}}$ aufgespannte **Spat** hat das Volumen

$$\mathbf{V} = |(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}| = |(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}}) \cdot \vec{\mathbf{b}}| = |(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) \cdot \vec{\mathbf{a}}|$$



- Wähle zwei unbekannte Vektoren, die in der Regel nicht in einer Linie liegen, als Variablen.
- Lege einen geschlossenen Vektorzug fest, der beide mit den Variablen belegten Vektoren als Teilvektoren enthält.
  Beschreibe jeden Teilvektor mit Hilfe der gegebenen und/oder der mit den Variablen belegten Vektoren.
  Alternativ kannst Du auch einen bestimmten Vektor durch zwei unterschiedliche Wege definieren, die je mindestens einen der gewählten Vektoren enthalten, und die beiden Vektorgleichungen dann gleichsetzen.
- Bringe gegebenenfalls durch Addition oder Subtraktion alle Terme der entstandenen Vektorgleichung auf eine Seite, so dass auf der einen Seite der Nullvektor alleine steht.
- Multipliziere eventuell vorhandene Klammerausdrücke aus und sortiere dann, indem Du die jeweils vorgegebenen Vektoren ausklammerst.
- Da die vorgegebenen Vektoren linear unabhängig sind, kann die entstandene Vektorgleichung nur dann gültig sein, wenn die ausgeklammerten Faktoren der vorgegebenen Vektoren alle gleich null sind. Daraus erhältst Du zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Deren Lösung ergibt die relative Länge der unbekannten Vektoren.
- Berechne daraus das gefragte Teilstreckenverhältnis.

Schreibe die Parametergleichung der Geraden als drei einzelne Gleichungen:

$$\mathbf{x_1 = p_1 + t \cdot u_1}$$
$$\mathbf{x_2 = p_2 + t \cdot u_2}$$
$$\mathbf{x_3 = p_3 + t \cdot u_3}$$

Setze die $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$-Werte in die jeweilige Form der Ebenengleichung ein.

Bei der **Koordinatenform** erhältst Du eine Gleichung mit der Unbekannten $\mathbf{t}$. Löse die Gleichung nach $\mathbf{t}$ auf. Zur Berechnung des Schnittpunktes setzt Du $\mathbf{t}$ in die Geradengleichung ein.

Bei der **Normalenform** erhältst Du durch Ausmultiplizieren des Skalarproduktes eine Gleichung mit der Unbekannten $\mathbf{t}$. Löse die Gleichung nach $\mathbf{t}$ auf. Zur Berechnung des Schnittpunktes setzt Du $\mathbf{t}$ in die Geradengleichung ein.

Bei der **Parameterform** erhältst Du 3 Gleichungen mit drei Unbekannten ($\mathbf{t}$ und die beiden Parameter der Ebenengleichung). Löse das LGS. Zur Berechnung des Schnittpunktes setzt Du $\mathbf{t}$ in die Geradengleichung ein. Zur Kontrolle kannst Du die beiden anderen Parameter in die Ebenengleichung einsetzen.

Die Achsenabschnittsform ist ein Spezialfall der Koordinatenform
$\mathbf{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b}$ mit $\mathbf{b = 1}$.
Die Koeffizienten $\mathbf{a_i}$ der $\mathbf{x_i}$ werden dabei als Nenner geschrieben und geben direkt die jeweilige Koordinate der Schnittpunke der Ebene mit den Koordinatenachsen wieder.

$$\mathbf{\tfrac{a_1}{b} \cdot x_1 + \tfrac{a_2}{b} \cdot x_2 + \tfrac{a_3}{b} \cdot x_3 = 1}$$

$$\mathbf{\frac{x_1}{\frac{a_1}{b}} + \frac{x_2}{\frac{a_2}{b}} + \frac{x_3}{\frac{a_3}{b}} = 1}$$

$$\mathbf{\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2} + \frac{x_3}{s_3} = 1}$$

Damit lauten die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen
$\mathbf{S_1}$ $(\mathbf{s_1/0/0})$, $\mathbf{S_2}$ $(\mathbf{0/s_2/0})$ und $\mathbf{S_3}$ $(\mathbf{0/0/s_3})$.

Die Achsenabschnittsform erlaubt also die direkte Ermittlung der Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen. Wenn diese Schnittpunkte bekannt sind, kann man umgekehrt bequem die Achsenabschnittsform der Ebene aufstellen.

Beispiel:

$\mathbf{S_1}$ $(\mathbf{3/0/0})$, $\mathbf{S_2}$ $(\mathbf{0/-1/0})$ und $\mathbf{S_3}$ $(\mathbf{0/0/2})$ ergibt

$$\mathbf{\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{-1} + \frac{x_3}{2} = 1}$$

$$\mathbf{2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 6}$$