Überblick über Berechnungen mit dem CASIO bei Bernoulli-Ketten und Hypothesentests (=Signifikanztests) (389)

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge **n** mit der Trefferwahrscheinlichkeit **p** beträgt die Wahrscheinlichkeit für **k** Treffer ($\mathbf{0 \leq k \leq n}$):

$$\mathbf{B(n;p;k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Die Parameter im Ausdruck $\mathbf{B(n;p;k)}$ müssen beim CASIO-FX-9860 in der Funktion **Bpd** in anderer Reihenfolge eingegeben werden, nämlich **BinominalPD(k,n,p)**. Zum Aufruf drückst Du folgende Tasten: `MENU` `RUN-MAT` `OPTN` `F5 (STAT)` `F3 (DIST)` `F5 (BINM)` `F1 (Bpd)`

BinominalPD(*(wird angezeigt)* gefolgt von den komma-getrennten Zahlen **k,n,p** und der schließenden Klammer `)` und `EXE`.

Während die Funktion **Bpd** den Wert für einen bestimmten **k**-Wert berechnet, summiert die Funktion **Bcd** (Aufruf über `F2 (Bcd)` **BinominalCD(** *(wird angezeigt)* **k,n,p)** `EXE`) die Wahrscheinlichkeiten beginnend bei **k=0** bis zum eingegebenen maximalen **k**-Wert auf, also

$$\mathbf{\sum_{i=0}^{k} B(n;p;k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}$$

Beispiel:
Ein Basketballspieler wirft 6 mal und trifft mit 70%iger Wahrscheinlichkeit pro Wurf in den Korb. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für 0 bis 6 Treffer sowie die Wahrscheinlichkeiten für höchstens k Treffer.

Gib im GRAPH-Menü die beiden folgenden Zeilen ein und schau Dir die Tabelle im TABLE-Menü (F6) an. Beachte, dass Du nur für $\mathbf{0 \leq x \leq n}$ brauchbare Werte bekommst.

Y1=BinominalPD(X,6,0.7) (genau k=X Treffer) (Bpd findest Du mittels OPTN F6 F3 F1 F5 F1)
Y2=BinominalCD(X,6,0.7) (höchstens k=X Treffer) (Bcd findest Du mittels OPTN F6 F3 F1 F5 F2)

X	Y1	Y2	Berechnung von Y2 aus Y1
0	7.2E-4	7.2E-4	0 + 7.2E-4
1	0.0102	0.0109	7.2E-4 + 0.0102
2	0.0595	0.0704	0.0109 + 0.0595
3	0.1852	0.2556	0.0704 + 0.1852
4	0.3241	0.5798	0.2556 + 0.3241
5	0.3025	0.8823	0.5798 + 0.3025
6	0.1176	1	0.8823 + 0.1176

$\mathbf{P(X \leq n)}$ **bzw. BinominalCD(n,n,p) ist immer 1 für** $\mathbf{k = n}$

Bei vielen Aufgaben musst Du die gefragte Wahrscheinlichkeit zuerst so umformulieren, dass sie mit Hilfe der Funktionen **Bpd** und **Bcd** berechnet werden kann. Beachte dabei, dass bei der Funktion **Bcd** immer $\leq$ **k** berechnet wird. Für das obige Basketball-Beispiel sind z.B. folgende Fragen denkbar:

Text	**k**	**Übersetzung** **Umformung**	**Eingabe**
trifft genau 4 mal	4	$P(X = 4)$	Bpd(6,0.7,4)
trifft 2 oder 4 mal	2,4	$P(X = 2 \vee X = 4)$	Bpd(2,6,0.7) + Bpd(4,6,0.7)
trifft höchstens 3 mal	0,1,2,3	$P(X \leq 3)$	Bcd(3,6,0.7)
trifft weniger als 3 mal	0,1,2	$P(X < 3)$ $P(X \leq 2)$	Bcd(2,6,0.7)
trifft mehr als 4 mal	5,6	$P(X > 4)$ $P(X \leq 6) - P(X \leq 4)$	1 - Bcd(4,6,0.7)
trifft mindestens 4 mal	4,5,6	$P(X \geq 4)$ $P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$	1 - Bcd(3,6,0.7)
trifft mehr als 1 mal aber weniger als 5 mal	2,3,4	$P(1 < X < 5)$ $P(X \leq 4) - P(X \leq 1)$	Bcd(4,6,0.7) - Bcd(1,6,0.7)
trifft weniger als 2 mal oder mehr als 4 mal	0,1,5,6	$P(X < 2 \vee X > 4)$ $P(X \leq 1) + 1 - P(X \leq 4)$	Bcd(1,6,0.7) + 1 - Bcd(4,6,0.7)
trifft höchstens 1 mal oder mindestens 5 mal	0,1,5,6	$P(X \leq 1 \vee X \geq 5)$ $P(X \leq 1) + 1 - P(X \leq 4)$	Bcd(1,6,0.7) + 1 - Bcd(4,6,0.7)

Viele Aufgaben lassen sich im TABLE-MENU mit Hilfe von **Y1=BinominalPD(k,n,p)** oder **Y1=BinominalCD(k,n,p)** (gefolgt von EXE EXE) bequem bearbeiten. Je nach Fragestellung wird dabei eine der Variablen **k**, **n** oder **p** als Variable **X** eingegeben.

Hier wieder ein paar Basketball-Beispiele mit $\mathbf{n = 6}$ und $\mathbf{p = 0,7}$, falls **n** oder **p** nicht gesucht werden:

Text	Eingabe	TABLE-Einstellung mit F5 (SET)
1. Welche Trefferzahl hat die höchste Wahrscheinlichkeit?	BinominalPD(X,6,0.7)	Start: 0 End: 6 Step: 1
2. Für welche Maximaltrefferzahl liegt die Wahrscheinlichkeit noch unter 60 %?	BinominalCD(X,6,0.7)	Start: 0 End: 6 Step: 1
3. Wie groß ist die Einzeltrefferwahrscheinlichkeit, wenn die Gesamtwahrscheinlichkeit für maximal 4 Treffer bei 50 % liegt?	BinominalCD(4,6,X)	Start: 0 End: 1 Step: 0.1 (0.01; 0.001; ...) je nach gewünschter Genauigkeit
4. Wie oft muss man werfen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 5 Treffer erzielt?	1-BinominalCD(5,X,0.7)	Start: 0 End: abschätzen Step: 1

Alternativlösung zur 3. Aufgabe:
Zeichne im GRAPH-MENU das Schaubild von Y1=BinominalCD(4,6,X) mit folgenden V-WINDOW -Einstellungen: Xmin=-0.05; Xmax=1.05; scale=0.1; Ymin=-0.05; Ymax=1.05; scale=0.1 und bestimme den Schnittpunkt mit Y2=0,5 mittels `F5 (G-Solv)` und `F5 (ISCT)`.

Definition der bei einem Signifikanztest verwendeten Begriffe:

Begriff	Variable	Bedeutung
Nullhypothese	$\mathbf{H_0}$	die zu testende Hypothese
Alternative	$\mathbf{H_1}$	das Gegenteil von $\mathbf{H_0}$
Wahrscheinlichkeit	$\mathbf{p_0}$	Einzelwahrscheinlichkeit der Nullhypothese
Annahmebereich für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{A = [a; b]}$	die Nullhypothese stimmt
Ablehnungsbereich für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{\overline{A} = [0; a-1]}$ und $\mathbf{[b+1; n]}$	die Nullhypothese stimmt nicht
Stichprobenumfang	$\mathbf{n}$	Anzahl der genommenen Stichproben
Treffer	$\mathbf{k}$	Anzahl der Stichprobentreffer
linke Grenze	$\mathbf{a}$	kleinster k-Wert, der $\mathbf{H_0}$ noch stützt
rechte Grenze	$\mathbf{b}$	größter k-Wert, der $\mathbf{H_0}$ noch stützt
Signifikanzniveau	α	maximal erlaubte Irrtumswahrscheinlichkeit
Irrtumswahrscheinlichkeit = Fehler 1. Art	$\alpha' = \mathbf{P}(\overline{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}) \leq \alpha$	tatsächliche Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie zutrifft

Signifikanztests mit Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau α:

Es ist sinnvoll, als Nullhypothese den status quo, d.h. den Ausgangszustand, zu wählen.
Die in der folgenden Tabelle aufgelisteten Wahrscheinlichkeiten beruhen auf dieser Annahme.

	linksseitiger Test	**zweiseitiger Test**	**rechtsseitiger Test**
Nullhypothese	$\mathbf{H_0 : p = p_0}$	$\mathbf{H_0 : p = p_0}$	$\mathbf{H_0 : p = p_0}$
Alternative	$\mathbf{H_1 : p < p_0}$	$\mathbf{H_1 : p \neq p_0}$	$\mathbf{H_1 : p > p_0}$
Annahmebereich für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{A = [a; n]}$	$\mathbf{A = [a; b]}$	$\mathbf{A = [0; b]}$
Ablehnungsbereich für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{\overline{A} = [0; a-1]}$	$\mathbf{\overline{A} = [0; a-1]}$ und $\mathbf{[b+1; n]}$	$\mathbf{\overline{A} = [b+1; n]}$
Annahmebedingung für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{P(X \leq a)} > \alpha$	$\mathbf{P(X \leq a)} > \frac{1}{2}\alpha$ und $\mathbf{P(X \leq b)} > \mathbf{1} - \frac{1}{2}\alpha$	$\mathbf{P(X \leq b)} > \mathbf{1} - \alpha$
Irrtumswahrscheinlichkeit	$\alpha' = \mathbf{P(X \leq a-1)}$	$\alpha' =$ $\mathbf{P(X \leq a-1) + P(X \geq b+1)}$ $= \mathbf{P(X \leq a-1) + 1 - P(X \leq b)}$	$\alpha' = \mathbf{1 - P(X \leq b)}$

Erstelle mit dem GTR im TABLE-Menü die Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten
$\mathbf{BinominalCD(X, n, p_0)}$
$\mathbf{(SET \quad Start: 0 \quad End: n \quad Step: 1)}$

Ermittle im TABLE-Menü die kleinste Trefferzahl **a** bzw. die kleinste Trefferzahl **b**, für die die jeweilige Annahmebedingung gerade noch gilt. Notiere im Heft diese GTR-Zeile und die Vorgängerzeile.

Vergleiche die so ermittelte Annahmebedingung mit der Stichprobentrefferanzahl **k**. Liegt das Stichprobenergebnis im Annahmebereich, wird $\mathbf{H_0}$ bestätigt; andernfalls wird $\mathbf{H_0}$ verworfen.

Berechne bei Bedarf die Irrtumswahrscheinlichkeit α'.