Überblick über Berechnungen mit dem TI-83/84 bei Bernoulli-Ketten und Hypothesentests (= Signifikanztests) (380)

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge **n** mit der Trefferwahrscheinlichkeit **p** beträgt die Wahrscheinlichkeit für **k** Treffer ($\mathbf{0 \leq k \leq n}$):

$$\mathbf{B(n;p;k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Die Reihenfolge der Parameter im Ausdruck $\mathbf{B(n;p;k)}$ entspricht genau der Eingabereihenfolge dieser Parameter bei der TI-83/84-GTR-Funktion **binompdf(n,p,k)**. Zum Aufruf drückst Du folgende Tasten:

`2nd` `VARS` `0` `binompdf(` *(wird angezeigt)* gefolgt von den komma-getrennten Zahlen **n,p,k** und der schließenden Klammer `)` und `ENTER`.

Während die Funktion **binompdf(n,p,k)** den Wert für einen bestimmten **k**-Wert berechnet, summiert die Funktion **binomcdf(n,p,k)** (`2nd` `VARS` `ALPHA` `A` `binomcdf(` *(wird angezeigt)* **n,p,k)** `ENTER`) die Wahrscheinlichkeiten beginnend bei **k=0** bis zum eingegebenen maximalen **k**-Wert auf, also

$$\mathbf{\sum_{i=0}^{k} B(n;p;k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}$$

Beispiel:
Ein Basketballspieler wirft 6 mal und trifft mit 70%iger Wahrscheinlichkeit pro Wurf in den Korb. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für 0 bis 6 Treffer sowie die Wahrscheinlichkeiten für höchstens k Treffer.
Y1=binompdf(6,0.7,X) (genau k=X Treffer)
Y2=binomcdf(6,0.7,X) (höchstens k=X Treffer)
`2nd` `GRAPH` ergibt:

X	Y1	Y2	Berechnung von Y2 aus Y1
0	7.3E-4	7.3E-4	0 + 7.3E-4
1	.01021	.01094	7.3E-4 + .01021
2	.05954	.07047	.01094 + .05954
3	.18522	.25569	.07047 + .18522
4	.32414	.57982	.25569 + .32414
5	.30253	.88235	.57982 + .30253
6	.11765	1	.88235 + .11765

$\mathbf{P(X \leq n)}$ bzw. binomcdf(n,p,n) ist immer 1 für $\mathbf{k = n}$

Bei vielen Aufgaben musst Du die gefragte Wahrscheinlichkeit zuerst so umformulieren, dass sie mit Hilfe der Funktionen **binompdf** und **binomcdf** berechnet werden kann. Beachte dabei, dass bei der Funktion **binomcdf** immer $\mathbf{\leq k}$ berechnet wird. Für das obige Basketball-Beispiel sind z.B. folgende Fragen denkbar:

Text	**k**	**Übersetzung Umformung**	**Eingabe**
trifft genau 4 mal	4	$P(X = 4)$	binompdf(6,0.7,4)
trifft 2 oder 4 mal	2,4	$P(X = 2 \vee X = 4)$	binompdf(6,0.7,2) + binompdf(6,0.7,4)
trifft höchstens 3 mal	0,1,2,3	$P(X \leq 3)$	binomcdf(6,0.7,3)
trifft weniger als 3 mal	0,1,2	$P(X < 3)$ $P(X \leq 2)$	binomcdf(6,0.7,2)
trifft mehr als 4 mal	5,6	$P(X > 4)$ $P(X \leq 6) - P(X \leq 4)$	1 - binomcdf(6,0.7,4)
trifft mindestens 4 mal	4,5,6	$P(X \geq 4)$ $P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$	1 - binomcdf(6,0.7,3)
trifft mehr als 1 mal aber weniger als 5 mal	2,3,4	$P(1 < X < 5)$ $P(X \leq 4) - P(X \leq 1)$	binomcdf(6,0.7,4) - binomcdf(6,0.7,1)
trifft weniger als 2 mal oder mehr als 4 mal	0,1,5,6	$P(X < 2 \vee X > 4)$ $P(X \leq 1) + 1 - P(X \leq 4)$	binomcdf(6,0.7,1) + 1 - binomcdf(6,0.7,4)
trifft höchstens 1 mal oder mindestens 5 mal	0,1,5,6	$P(X \leq 1 \vee X \geq 5)$ $P(X \leq 1) + 1 - P(X \leq 4)$	binomcdf(6,0.7,1) + 1 - binomcdf(6,0.7,4)

Mit Hilfe von **Y1=binompdf(n,p,k)** oder **Y1=binomcdf(n,p,k)** und $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{GRAPH}}$ lassen sich viele Aufgaben bequem bearbeiten. Je nach Fragestellung wird dabei eine der Variablen **n**, **p** oder **k** als Variable **X** eingegeben.

Hier wieder ein paar Basketball-Beispiele mit $\mathbf{n = 6}$ und $\mathbf{p = 0,7}$, falls **n** oder **p** nicht gesucht werden:

Text	Eingabe	TI-Einstellung (2nd) WINDOW
1. Welche Trefferzahl hat die höchste Wahrscheinlichkeit?	binompdf(6,0.7,X)	TblStart=0 Δ Tbl=1 Xmin=0 Xmax=6
2. Für welche Maximaltrefferzahl liegt die Wahrscheinlichkeit noch unter 60 %?	binomcdf(6,0.7,X)	TblStart=0 Δ Tbl=1 Xmin=0 Xmax=6
3. Wie groß ist die Einzeltreffer-wahrscheinlichkeit, wenn die Gesamtwahrscheinlichkeit für maximal 4 Treffer bei 50 % liegt?	binomcdf(6,X,4)	TblStart=0 Δ Tbl=0.1 (0.01; 0.001; ...) je nach gewünschter Genauigkeit Xmin=0 Xmax=1
4. Wie oft muss man werfen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 5 Treffer erzielt?	1-binomcdf(X,0.7,5)	TblStart=0 Δ Tbl=1 Xmin=0 Xmax= abschätzen

Alternativlösung zur 3. Aufgabe:
Zeichne das Schaubild von Y1=binomcdf(6,X,4) mit folgenden $\boxed{\text{WINDOW}}$ -Einstellungen:

Xmin=-0.05; Xmax=1.05; Xscl=0.1; Ymin=-0.05; Ymax=1.05; Yscl=0.1;
und bestimme den Schnittpunkt mit Y2=0,5.

Definition der bei einem Signifikanztest verwendeten Begriffe:

Begriff	Variable	Bedeutung
Nullhypothese	$\mathbf{H_0}$	die zu testende Hypothese
Alternative	$\mathbf{H_1}$	das Gegenteil von $\mathbf{H_0}$
Wahrscheinlichkeit	$\mathbf{p_0}$	Einzelwahrscheinlichkeit der Nullhypothese
Annahmebereich für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{A = [a; b]}$	die Nullhypothese stimmt
Ablehnungsbereich für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{\overline{A} = [0; a-1]}$ und $\mathbf{[b+1; n]}$	die Nullhypothese stimmt nicht
Stichprobenumfang	$\mathbf{n}$	Anzahl der genommenen Stichproben
Treffer	$\mathbf{k}$	Anzahl der Stichprobentreffer
linke Grenze	$\mathbf{a}$	kleinster k-Wert, der $\mathbf{H_0}$ noch stützt
rechte Grenze	$\mathbf{b}$	größter k-Wert, der $\mathbf{H_0}$ noch stützt
Signifikanzniveau	α	maximal erlaubte Irrtumswahrscheinlichkeit
Irrtumswahrscheinlichkeit = Fehler 1. Art	$\alpha' = \mathbf{P}(\overline{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}) \leq \alpha$	tatsächliche Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie zutrifft

Signifikanztests mit Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau α:

Es ist sinnvoll, als Nullhypothese den status quo, d.h. den Ausgangszustand, zu wählen.
Die in der folgenden Tabelle aufgelisteten Wahrscheinlichkeiten beruhen auf dieser Annahme.

	linksseitiger Test	**zweiseitiger Test**	**rechtsseitiger Test**
Nullhypothese	$\mathbf{H_0 : p = p_0}$	$\mathbf{H_0 : p = p_0}$	$\mathbf{H_0 : p = p_0}$
Alternative	$\mathbf{H_1 : p < p_0}$	$\mathbf{H_1 : p \neq p_0}$	$\mathbf{H_1 : p > p_0}$
Annahmebereich für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{A = [a; n]}$	$\mathbf{A = [a; b]}$	$\mathbf{A = [0; b]}$
Ablehnungsbereich für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{\overline{A} = [0; a-1]}$	$\mathbf{\overline{A} = [0; a-1]}$ und $\mathbf{[b+1; n]}$	$\mathbf{\overline{A} = [b+1; n]}$
Annahmebedingung für $\mathbf{H_0}$	$\mathbf{P(X \leq a)} > \alpha$	$\mathbf{P(X \leq a)} > \frac{1}{2}\alpha$ und $\mathbf{P(X \leq b)} > \mathbf{1} - \frac{1}{2}\alpha$	$\mathbf{P(X \leq b)} > \mathbf{1} - \alpha$
Irrtumswahrscheinlichkeit	$\alpha' = \mathbf{P(X \leq a-1)}$	$\alpha' =$ $\mathbf{P(X \leq a-1) + P(X \geq b+1)}$ $= \mathbf{P(X \leq a-1) + 1 - P(X \leq b)}$	$\alpha' = \mathbf{1 - P(X \leq b)}$

Erstelle im GTR die Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{binomcdf(n, p_0, X)}$
($\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{WINDOW}}$ **TblStart** = ein Wert in der Nähe des Erwartungswertes $\mu = \mathbf{n \cdot p_0}$ $\mathbf{\Delta Tbl = 1}$)

Ermittle in der GTR-Tabelle die kleinste Trefferzahl **a** bzw. die kleinste Trefferzahl **b**, für die die jeweilige Annahmebedingung gerade noch gilt. Notiere im Heft diese GTR-Zeile und die Vorgängerzeile.

Vergleiche die so ermittelte Annahmebedingung mit der Stichprobentrefferanzahl **k**. Liegt das Stichprobenergebnis im Annahmebereich, wird $\mathbf{H_0}$ bestätigt; andernfalls wird $\mathbf{H_0}$ verworfen.

Berechne bei Bedarf die Irrtumswahrscheinlichkeit α'.