Die 1. Ableitung $\mathbf{f'(x)}$ einer Funktion $\mathbf{f(x)}$ erhält man, wenn man zu jedem $\mathbf{x}$-Wert die Steigung der Tangente bestimmt, die das Schaubild von $\mathbf{f(x)}$ im Punkt $(\mathbf{x}/\mathbf{f(x)})$ berührt, und diese Steigungen in einem Schaubild als Funktion von $\mathbf{x}$ aufzeichnet.
Die 2. Ableitung ist entsprechend das Schaubild der Tangentensteigungen der 1. Ableitung usw.
Daraus ergeben sich einige wichtige Aspekte für die Kurvendiskussion:

Hoch- und Tiefpunkte:
Im Hoch- oder Tiefpunkt ist die Tangentensteigung $\mathbf{0}$ (waagerechte Tangente). Demzufolge ist der Wert der 1. Ableitung $\mathbf{0}$, d.h. das Schaubild von $\mathbf{f'(x)}$ hat hier eine Nullstelle.
Die notwendige Bedingung für einen Hoch- oder Tiefpunkt ist deshalb: $\mathbf{f'(x) = 0}$

Wendepunkte:
Im Wendepunkt ist der Betrag der Steigung im Vergleich zu den benachbarten Steigungen maximal oder minimal. Deshalb erscheint ein Wendepunkt in der 1. Ableitung als Hoch- oder Tiefpunkt und damit in der 2. Ableitung als Nullstelle. Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist also: $\mathbf{f''(x) = 0}$

Sattelpunkte:
Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Hier gilt also als notwendige Bedingung sowohl $\mathbf{f'(x) = 0}$ (waagerechte Tangente) als auch $\mathbf{f''(x) = 0}$ (Wendepunkt).

Allgemeine Gleichung ganzrationaler Funktionen:

$$\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0}$$

mit $\mathbf{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0} \in \mathcal{R}$
und $\mathbf{n}$ natürliche Zahl
(merke: $\mathbf{a_1 x^1 = a_1 x}$ und $\mathbf{a_0 x^0 = a_0 \cdot 1 = a_0}$)

Betrachtet wird nur der Term mit der höchsten Potenz von $\mathbf{x}$. Man muss dann noch unterscheiden, ob die Hochzahl $\mathbf{n}$ dieser höchsten Potenz gerade oder ungerade ist.

Eigenschaft	**n ist gerade**
Zahl der Nullstellen	$\mathbf{0}$ bis max. $\mathbf{n}$
Zahl der Extrempunkte	$\mathbf{1}$ bis max. $\mathbf{n-1}$
Zahl der Wendepunkte	$\mathbf{0}$ bis max. $\mathbf{n-2}$
Kurvenverlauf für $\mathbf{x}$ von $-\infty$ bis $+\infty$	
für $\mathbf{a_n > 0}$	$\mathbf{f(x)}$ von $+\infty$ nach $+\infty$
für $\mathbf{a_n < 0}$	$\mathbf{f(x)}$ von $-\infty$ nach $-\infty$

Eigenschaft	**n ist ungerade**
Zahl der Nullstellen	$\mathbf{1}$ bis max. $\mathbf{n}$
Zahl der Extrempunkte	$\mathbf{0}$ bis max. $\mathbf{n-1}$
Zahl der Wendepunkte	$\mathbf{1}$ bis max. $\mathbf{n-2}$
Kurvenverlauf für $\mathbf{x}$ von $-\infty$ bis $+\infty$	
für $\mathbf{a_n > 0}$	$\mathbf{f(x)}$ von $-\infty$ nach $+\infty$
für $\mathbf{a_n < 0}$	$\mathbf{f(x)}$ von $+\infty$ nach $-\infty$

1. Definitionsmenge

   (z.B. bei gebrochenrationalen, Wurzel- oder Logarithmus-Funktionen)

2. Symmetrie

3. Periodizität

   nur bei trigonometrischen Funktionen, z.B. $\mathbf{sin(bx)}$ oder $\mathbf{cos(bx)}$

4. Polstellen; senkrechte Asymptoten

   (z.B. bei gebrochenrationalen oder Logarithmus-Funktionen)

5. Verhalten für $\mathbf{x} \to \pm\infty$; waagerechte Asymptoten

6. Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse

7. Ableitungen

8. Extremstellen

9. Wendestellen

10. Monotonieverhalten

11. Krümmungsverhalten

12. Schaubild

    Falls der GTR verwendet werden darf, diesen Punkt zwecks besserer Orientierung als Erstes erledigen!

Die jeweiligen notwendigen Bedingungen sind absolute Voraussetzungen für die Existenz von Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten.
Da diese Bedingungen sich aber teilweise gleichen (Sattelpunkt!), muss ein weiteres Kriterium zur endgültigen Entscheidung herangezogen werden, eben die hinreichende Bedingung.
Hierzu betrachtet man weitere Ableitungen und zwar muss so lange abgeleitet werden, bis das Einsetzen des aus der notwendigen Bedingung erhaltenen $\mathbf{x}$-Wertes einen von $\mathbf{0}$ verschiedenen Wert der Ableitung ergibt.

Die hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt ist, dass die 2. (oder die nächste geradzahlige) Ableitung $< \mathbf{0}$ wird.

Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt ist, dass die 2. (oder die nächste geradzahlige) Ableitung $> \mathbf{0}$ wird.

Die hinreichende Bedingung für einen Wende- oder Sattelpunkt ist, dass die 3. (oder die nächste ungeradzahlige) Ableitung $\neq \mathbf{0}$ wird.

Mache Dir diese hinreichenden Bedingungen anhand der Schaubilder einer Funktion und ihrer Ableitungen klar.