Schiefe Asymptoten bei gebrochenrationalen Funktionen (394)

Verhalten der Funktion für $\mathbf{x} \to \pm\infty$ (andere Schreibweise: $|\mathbf{x}| \to \infty$):

Wichtig ist hier die Frage nach **waagerechten oder schiefen Asymptoten** und **Grenzwerten**. Zur Beurteilung des Verhaltens müssen die Terme mit der jeweils höchsten Potenz in Zähler und Nenner, also $\mathbf{a_n x^n}$ und $\mathbf{b_m x^m}$ herangezogen werden. Man unterscheidet **4 Fälle**:

1. $\mathbf{n < m}$

   Mit betragsmäßig größer werdendem $\mathbf{x}$ wächst der Nenner schneller als der Zähler. Der Funktionswert nähert sich deshalb beliebig nahe der Zahl $\mathbf{0}$, erreicht sie aber nicht. Die **x-Achse** (Gleichung $\mathbf{y = 0}$) ist damit eine **waagerechte Asymptote** der Funktion.
   Damit existiert auch ein Grenzwert: Für $\mathbf{x} \to \pm\infty$ geht $\mathbf{f(x)} \to \mathbf{0}$.

2. $\mathbf{n = m}$

   Mit betragsmäßig größer werdendem $\mathbf{x}$ wachsen Nenner und Zähler im Verhältnis gleich schnell. Der Funktionswert nähert sich deshalb beliebig nahe dem Quotienten aus den beiden Vorzahlen $\frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_m}}$, erreicht ihn aber nicht. Die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_m}}$ ist damit eine **waagerechte Asymptote** der Funktion.
   Damit existiert auch ein Grenzwert: Für $\mathbf{x} \to \pm\infty$ geht $\mathbf{f(x)} \to \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_m}}$.

3. $\mathbf{n = m + 1}$

   Mit betragsmäßig größer werdendem $\mathbf{x}$ wächst der Zähler schneller als der Nenner. Der Funktionswert geht deshalb gegen $+$ oder $-\infty$. In diesem Fall gibt es eine **schiefe Asymptote** mit der Steigung $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_m}}$.
   Hier existiert kein Grenzwert: Für $\mathbf{x} \to \pm\infty$ geht $\mathbf{f(x)} \to +\infty$ oder $-\infty$.
   Das Vorzeichen von ∞ ist abhängig von $\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{a_n}$ und $\mathbf{b_m}$.

4. $\mathbf{n > m + 1}$

   Mit betragsmäßig größer werdendem $\mathbf{x}$ wächst der Zähler schneller als der Nenner. Der Funktionswert geht deshalb gegen $+$ oder $-\infty$. In diesem Fall gibt es keine schiefe Asymptote (Gerade), sondern eine **ganzrationale Näherungskurve vom Grad n-m**.
   Hier existiert kein Grenzwert: Für $\mathbf{x} \to \pm\infty$ geht $\mathbf{f(x)} \to +\infty$ oder $-\infty$.
   Das Vorzeichen von ∞ ist abhängig von $\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{a_n}$ und $\mathbf{b_m}$.

Bestimmung der Näherungsfunktion für $\mathbf{x} \to \pm\infty$ für die Fälle 3 und 4

Rein formal bekommt man die Gleichung der Asymptoten bzw. der Näherungskurve durch **Polynomdivision** von Zähler durch Nenner. Als Ergebnis erhält man eine **Summe aus einer ganzrationalen Funktion (die auch 0 sein kann) und einer gebrochenrationalen Funktion mit Nennergrad > Zählergrad**. Die ganzrationale Funktion ist die Näherungsfunktion, da die gebrochenrationale Funktion für $\mathbf{x} \to \pm\infty$ gegen 0 geht.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^5-3x^4-4x^3+10x^2+12x-18}{2x^2(x+2)(x-3)}$

Definitionsbereich:

Nenner gleich 0 setzen: $2x^2(x+2)(x-3) = 0$

Der Satz vom Nullprodukt liefert: $x_1 = 0;\ x_2 = -2;\ x_3 = 3$ also $D_f = \mathcal{R} \setminus \{-2; 0; 3\}$

Verhalten der Funktion an den Definitionslücken:

Probe, ob der Zähler für die x-Werte der Definitionslücken 0 wird:

$Z(-2) = (-2)^5 - 3 \cdot (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^3 + 10 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) - 18 = -50$

$Z(0) = -18$

$Z(3) = 3^5 - 3 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 10 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 18 = 0$

Polynomdivision zwecks besserem Überblick:

$(x^5-3x^4-4x^3+10x^2+12x-18) : (2x^4-2x^3-12x^2) = \frac{1}{2}x-1+\frac{-2x^2+12x-18}{2x^4-2x^3-12x^2} = \frac{1}{2}x-1-\frac{(x-3)^2}{x^2(x+2)(x-3)} = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{x-3}{x^2(x+2)}$

Betrachtung der einzelnen Definitionslücken:

an der Stelle $x = 0$: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, da gerade Hochzahl des Faktors x^2

Vorzeichenbestimmmung: $f(-0,1) = 162,11$ positiv $f(0,1) = 137,15$ positiv

an der Stelle $x = -2$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel, da ungerade Hochzahl des Faktors $(x+2)$

Vorzeichenbestimmmung: $f(-2,1) = -13,61$ negativ $f(-1,9) = 11,62$ positiv

an der Stelle $x = 3$: Hebbare Lücke, da der Faktor $(x-3)$ im Nenner weggekürzt werden konnte.

Für die gekürzte Funktion gilt $f(3) = 0,5$

Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$:

Höchster Potenzterm im Zähler: $a_n x^n = x^5$

Höchster Potenzterm im Nenner (nach dem Ausmultiplizieren): $b_m x^m = 2x^4$

Wir haben den Fall **3.** $n = m+1$ vorliegen, also schiefe Asymptote mit der Steigung $m = \frac{a_n}{b_m} = \frac{1}{2}$. Die exakte Gleichung der schiefen Asymptote ist der ganzrationale Funktionsanteil nach der Polynomdivision $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Eine Vorzeichenbetrachtung des gebrochenrationalen Funktionsanteiles ergibt für $x \to \pm\infty$ einen negativen Wert. Deshalb nähert sich die Kurve jeweils von unten an die Asymptote an.

Alternative: Den ausmultiplizierten Funktionsterm mit dem Kehrwert der höchsten Potenz von x erweitern

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5-3x^4-4x^3+10x^2+12x-18}{2x^4-2x^3-12x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{10}{x^3}+\frac{12}{x^4}-\frac{18}{x^5}}{\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{12}{x^3}} = \frac{1}{\text{``}\pm 0\text{``}} \to \pm\infty$$

Schaubild: