Übersetzungsbeispiele Deutsch - Mathematik bei Steckbriefaufgaben (396)

Bei den sogenannten Steckbriefaufgaben ist der Grundterm einer gesuchten Funktion mit Hilfe von Parametern vorgegeben. Die spezifisch geforderten Eigenschaften sind im Text oder in einem Schaubild beschrieben. Diese Informationen müssen in Mathematiksprache übersetzt und dann in den vorgebenen Funktionsterm, die 1. oder die 2. Ableitung eingesetzt werden. So ergibt sich ein Gleichungssystem. Die Anzahl der aufzustellenden Gleichungen entspricht der Anzahl der zu bestimmenden Parameter im Funktionsterm.

Bei der Suche nach ganzrationalen Funktionen ergibt sich (bis auf wenige Ausnahmen, siehe ganz unten in der Tabelle) ein lineares Gleichungssystem, das mit Hilfe des Gauss-Verfahrens von Hand oder mittels GTR-Matrix-Rechnung gelöst werden kann.

Ist bei Wachstumsaufgaben die Wachstumsfunktion nicht angegeben, muss diese zunächst bestimmt werden, bevor die anderen Fragen bearbeitet werden können. Hier ergibt sich in den allermeisten Fällen ein nicht-lineares Gleichungssystem, das mit Hilfe des Einsetzungs-, Additions- oder Divisions-Verfahren von Hand gelöst werden muss.

In der nachfolgenden Tabelle sind die gängigsten Informationen und ihre vollständige Übersetzung in mathematische Bedingungen aufgelistet.

Information	**Bedingungen**
Der Graph der Funktion geht durch den Punkt P(3/7)	$f(3) = 7$
… schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -4$	$f(-4) = 0$
… geht durch den Ursprung	$f(0) = 0$
… besitzt im Punkt R(4/1) eine Extremstelle	$f(4) = 1, f'(4) = 0$
… hat an der Stelle $x = 5$ eine Wendestelle	$f''(5) = 0$
… den Sattelpunkt $Q(-2/6)$	$f(-2) = 6, f'(-2) = 0, f''(-2) = 0$
… hat im Punkt $S(-5/10)$ eine Wendetangente mit der Steigung -2	$f(-5) = 10, f'(-5) = -2; f''(-5) = 0$
… die Tangente im Punkt $T(-3/8)$ ist parallel zur Geraden $y = 2x - 6$	$f(-3) = 8, f'(-3) = 2$
… berührt an der Stelle x=1 die x-Achse	$f(1) = 0, f'(1) = 0$
… seine Tangente im Punkt $B(-1/5)$ ist senkrecht zur Geraden $y = \frac{2}{3}x + 7$	$f(-1) = 5, f'(-1) = -\frac{3}{2}$
… die Normale im Punkt $A(2/-4)$ hat die Gleichung $y = -3x + 2$	$f(2) = -4, f'(2) = \frac{1}{3}$
… hat an der Stelle x=-4 eine Wendestelle mit waagerechter Tangente	$f'(-4) = 0, f''(-4) = 0$
… die Tangente an der Stelle x=2 hat die Gleichung $y = 3x + 1$	$f'(2) = 3, f(2) = 7$
Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse	Es treten nur Potenzen mit geradzahligen Hochzahlen auf.
Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung	Es treten nur Potenzen mit ungeradzahligen Hochzahlen auf.
… berührt die x-Achse Da der x-Wert des Berührpunktes nicht bekannt ist, wird er als zusätzliche Variable x_B definiert. Man erhält dann gleich 2 Bedingungen, so dass die Anzahl der benötigten Gleichungen mit der Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten zusammenpasst. Allerdings ist das Gleichungssystem nicht mehr linear, da x_B auch in potenzierter Form auftritt.	$f(x_B) = 0, f'(x_B) = 0$

Beispiel: Eine zur y-Achse symmetrische Funktion 4. Grades hat einen Wendepunkt bei $W(-2/2)$ und ihre Tangente an der Stelle $x = -3$ steht senkrecht auf der Geraden $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

Ansatz: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (b=0 und d=0 wegen Achsensymmetrie)
$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$

Bedingungen:

$$\begin{array}{llcllrcrcrcl}
1. & f(-2) & = & 2 & \Rightarrow & 16a & + & 4c & + & e & = & 2 \\
2. & f''(-2) & = & 0 & \Rightarrow & 48a & + & 2c & & & = & 0 \\
3. & f'(-3) & = & \frac{3}{2} & \Rightarrow & -108a & - & 6c & & & = & \frac{3}{2}
\end{array}$$

Lösung:
$f(x) = \frac{1}{24}x^4 - x^2 + \frac{16}{3}$