Tipps zur korrekten Übersetzung von Deutsch nach Mathematik bei Bernoulli-Ketten und Hypothesentests (397)

- Bei Bernoulli-Experimenten gibt es ja nur zwei mögliche Ausgänge, also auch nur zwei Einzelwahrscheinlichkeiten **p** und **1-p**. Prüfe genau, für welchen Ausgang die Wahrscheinlichkeit angegeben ist und welchen Ausgang (und damit welche Wahrscheinlichkeit) Du zur Berechnung verwendest; und auf welchen Ausgang sich die zu beantwortende Frage bezieht. Grundsätzlich sind alle Berechnungen sowohl unter Verwendung von **p** als auch unter Verwendung von **1-p** durchführbar. Es muss nur die Frage entsprechend umformuliert werden. Beispiel:
  In einem Schulbus sind durchschnittlich 95 % der 60 Sitzplätze besetzt.
  "Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mehr als 52 Sitzplätze besetzt."
  Lösung mittels TI-GTR: $P(X > 52) = 1 - P(X \leq 52) = 1 - \text{binomcdf}(60, 0.95, 52) = 0.99021$
  lautet umformuliert:
  "Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind weniger als 8 Sitzplätze frei."
  Lösung mittels TI-GTR: $P(X < 8) = P(X \leq 7) = \text{binomcdf}(60, 0.05, 7) = 0.99021$

- Zur Berechnung der Bernoulli-Gesamtwahrscheinlichkeit **P** werden die Variablen **n**, **p** und **k** verwendet. Sobald 3 dieser 4 Variablen bekannt sind, kann die fehlende vierte berechnet werden. Werden **n**, **p** oder **k** gesucht, so wird im GTR für die zu berechnende Variable die Variable **X** eingesetzt und in der Wahrscheinlichkeitstabelle die zur verlangten Gesamtwahrscheinlichkeit direkt benachbarte Wahrscheinlichkeit aufgesucht und der zu ihr gehörende **X**-Wert abgelesen.

  Anstelle von nur **X** sind auch kompliziertere Eingaben möglich. Wird zum Beispiel gefragt, in welchem k-Intervall um den Erwartungswert $[\mu - \mathbf{k}; \mu + \mathbf{k}]$ die Trefferwahrscheinlichkeit höchstens 85 % beträgt, so lautet die Eingabe für n=200 und p=0,7:

  binomcdf(200,0.7,140+X)-binomcdf(200,0.7,140-X-1) (für den TI)

  BinominalCD(140+X,200,0.7)-BinominalCD(140-X-1,200,0.7) (für den CASIO)

  Lösung: $\mathbf{X = 8}$, also im k-Intervall $[\mathbf{132}; \mathbf{148}]$

- Bei Hypothesentests entscheidet das Relationszeichen der Alternative $\mathbf{H_1}$ darüber, ob es sich um einen links- oder rechtsseitgen Test handelt:

  $\mathbf{H_1} : \mathbf{p} <$ oder $\leq$ ... = linksseitiger Test
  $\mathbf{H_1} : \mathbf{p} >$ oder $\geq$ ... = rechtsseitiger Test

- Üblicherweise wird die Wahrscheinlichkeit für die Nullhypothese in der Form $\mathbf{p = 0,15}$ oder $\mathbf{p \geq 0,15}$ bzw. $\mathbf{p \leq 0,15}$ angegeben. Damit muss in der Annahmebedingung für $\mathbf{H_0}$ das Relationszeichen $>$ verwendet werden.
  Lautet die Wahrscheinlichkeit für die Nullhypothese dagegen $\mathbf{p < 0,15}$ bzw. $\mathbf{p > 0,15}$, muss in der Annahmebedingung für $\mathbf{H_0}$ das Relationszeichen $\geq$ verwendet werden.
  Diese Unterscheidung ist aber nur dann wichtig, wenn eine in der GTR-Tabelle abzulesende Wahrscheinlichkeit zufällig genau mit dem Wert von α bzw. $\mathbf{1} - \alpha$ identisch ist.

- **"B besser als A"** oder **"B schlechter als A"** oder **"B im Vergleich zu A"**
  deutet stark darauf hin, dass die Wahrscheinlichkeit von **A** für die Nullhypothese zu verwenden ist.

- Bezieht sich das Wort **mindestens** auf den Annahmebereich der Nullhypothese $\mathbf{H_0}$,
  ist es ein linksseitiger Test.

- Bezieht sich das Wort **mindestens** auf den Ablehnungsbereich der Nullhypothese $\mathbf{H_0}$,
  ist es ein rechtsseitiger Test mit der Alternative $\mathbf{H_1}$ als neuer Nullhypothese $\mathbf{H_0}$.

- Bezieht sich das Wort **höchstens** auf den Annahmebereich der Nullhypothese $\mathbf{H_0}$,
  ist es ein rechtsseitiger Test.

- Bezieht sich das Wort **höchstens** auf den Ablehnungsbereich der Nullhypothese $\mathbf{H_0}$,
  ist es ein linksseitiger Test mit der Alternative $\mathbf{H_1}$ als neuer Nullhypothese $\mathbf{H_0}$.

- **Achtung:**

  Bei der Formulierung der **Annahmebedingung für $\mathbf{H_0}$** bzw. der **Ablehnungsbedingung für $\mathbf{H_1}$** ist peinlichst darauf zu achten, ob als zu bestimmender **k-Wert** der Randwert des Annahmebereiches von $\mathbf{H_0}$ oder der Randwert des Ablehnungsbereiches von $\mathbf{H_0}$ gewählt wird! Die jeweils gefundenen **k-Werte** unterscheiden sich dabei immer um genau **1**. Dies muss bei der Interpretation des Ergebnisses entsprechend berücksichtigt werden.

  In den gängigen Mathebüchern "Lambacher-Schweizer Kursstufe" oder "Fokus Kursstufe" und im Rahmen dieser Lernkärtchen wird der zu bestimmende **k-Wert als Randwert des Annahmebereiches von $\mathbf{H_0}$** definiert. Dagegen wird in den gängigen Formelsammlungen (Wittwer-Verlag, orangefarbenes Cover; Klett-Verlag, blaues Cover) der zu bestimmende k-Wert als Randwert des Ablehnungsbereich H_1 definiert.

Lösen und Interpretieren von Hypothesentest-Aufgaben

Hypothesentests werden verwendet, wenn man eine Aussage über den wahrscheinlichen Ausgang eines Bernoulli-Experimentes (ja/nein bzw. Treffer/Nichttreffer) mit sehr großer Kettenlänge bekommen möchte, das in der Praxis (aus Kostengründen oder mangels Beteiligung der zu befragenden Menschen) gar nicht durchgeführt werden kann. In diesem Fall führt man das Experiment nur mit einem Teil der Gesamtmenge (der sogenannten Stichprobenmenge) durch und versucht mit Hilfe der Stochastik auf die Wahrscheinlichkeit des Ausganges bei der Gesamtmenge zurückzuschließen.

Der praktische Nutzen eines Hypothesentests muss aber bei jeder Anwendung sorgfältig beurteilt werden. Insbesondere muss genau überlegt werden, was als Nullhypothese gewählt wird. Denn das Vertauschen von Nullhypothese und Alternative verändert die Fragestellung und führt damit zu anderen Ergebnissen und damit möglicherweise zu anderen Schlussfolgerungen. Dazu schauen wir uns folgendes Beispiel an:

Ein Medikament A heilt eine Krankheit bei 85 % der Patienten. Ein Medikament B soll besser wirken. Es wird eine Testreihe an 100 Personen durchgeführt. Bei wie vielen Patienten muss das Medikament B die Krankheit mindestens heilen, damit man auf einem Signifikanzniveau von 5 % bzw. 1 % bzw. 0,1 % bei Medikament B von einer besseren Wirkung als bei Medikament A ausgehen kann?

Mit der Nullhypothese "Medikament A heilt 85 % der Patienten" wird folgende Frage geklärt: Wieviele Patienten darf Medikament A höchstens heilen, damit diese Hypothese aufrecht erhalten werden kann? Streng genommen hat das Ergebnis dieses Tests also mit der Wirksamkeit des Medikaments B gar nichts zu tun.

Nullhypothese:	$\mathbf{H_0 : p = 0,85}$	diese Zahl $\mathbf{p_0}$ wird im GTR für p eingegeben
Alternative:	$\mathbf{H_1 : p > 0,85}$	d.h. rechtsseitiger Test
Annahmebedingung für $\mathbf{H_0}$:	$\mathbf{P(X \leq b) > 1 - \alpha}$	
Ergebnisse für:	$\alpha = \mathbf{0,05}$	$\mathbf{b = 91}$, also Ablehnungsbereich $[\mathbf{92; 100}]$ Patienten
	$\alpha = \mathbf{0,01}$	$\mathbf{b = 93}$, also Ablehnungsbereich $[\mathbf{94; 100}]$ Patienten
	$\alpha = \mathbf{0,001}$	$\mathbf{b = 95}$, also Ablehnungsbereich $[\mathbf{96; 100}]$ Patienten

Nehmen wir jetzt an, dass das Medikament B in Wirklichkeit die Krankheit bei 90 % der Patienten heilt, also deutlich besser als Medikament A ist, und berechnen die Wahrscheinlichkeiten für die Heilung von mindestens 92 bzw. 94 bzw. 96 Patienten. Dann erhalten wir hierfür 32,1 bzw. 11,7 bzw. 2,4 %. Die deutlich bessere Wirksamkeit des Medikaments B wird also bei dieser Nullhypothese und den gewählten Signifikanzniveaus mit hoher bzw. sehr hoher Wahrscheinlichkeit gar nicht erkannt!

Vergrößert man die Stichprobenmenge von 100 auf 1000 Patienten, erhält man ein gänzlich anderes Bild:

Ergebnisse für:	$\alpha = \mathbf{0,05}$	$\mathbf{b = 868}$, also Ablehnungsbereich $[\mathbf{869; 1000}]$ Patienten
	$\alpha = \mathbf{0,01}$	$\mathbf{b = 876}$, also Ablehnungsbereich $[\mathbf{877; 1000}]$ Patienten
	$\alpha = \mathbf{0,001}$	$\mathbf{b = 884}$, also Ablehnungsbereich $[\mathbf{885; 1000}]$ Patienten

Nehmen wir jetzt wieder an, dass das Medikament B die Krankheit bei 90 % der Patienten heilt, also deutlich besser als Medikament A ist, und berechnen die Wahrscheinlichkeiten für die Heilung von mindestens 869 bzw. 877 bzw. 885 Patienten. Dann erhalten wir hierfür 99,9 bzw. 99,2 bzw. 94,7 %. Die deutlich bessere Wirksamkeit des Medikaments B wird also jetzt mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit erkannt!

Vertauscht man Nullhypothese und Alternative, dann lautet die Nullhypothese "Medikament B heilt mehr als 85 % der Patienten" und es wird die Frage geklärt: Wieviele Patienten müssen von Medikament B mindestens geheilt werden, damit von einer besseren Wirkung als bei Medikament A ausgegangen werden kann?

Nullhypothese:	$\mathbf{H_0 : p > 0,85}$	
Alternative:	$\mathbf{H_1 : p \leq 0,85}$	d.h. linksseitiger Test
Annahmebedingung für $\mathbf{H_0}$:	$\mathbf{P(X \leq a) > \alpha}$	
Ergebnisse für:	$\alpha = \mathbf{0,05}$	$\mathbf{a = 79}$, also Annahmebereich $[\mathbf{79; 1000}]$ Patienten
	$\alpha = \mathbf{0,01}$	$\mathbf{a = 76}$, also Annahmebereich $[\mathbf{76; 1000}]$ Patienten
	$\alpha = \mathbf{0,001}$	$\mathbf{a = 73}$, also Annahmebereich $[\mathbf{73; 1000}]$ Patienten

Diese Ergebnisse liegen deutlich unter den Zahlen für den Ablehnungsbereich der Nullhypothese des ersten Tests oben!

Es gibt also bei der Binomialverteilung rechts und links des Erwartungswertes ($\mu = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p} = 100 \cdot 0,85 = 85$) einen Bereich von $\mathrm{k_{min}}$ bis $\mathrm{k_{max}}$, in dem beide Nullhypothesen zutreffen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die ermittelte Anzahl der geheilten Patienten in diesem Bereich liegt, beträgt ca. $(100 - 2\alpha)\%$, d.h. mindestens 90 % ($\alpha \leq 5\%$). Je größer die Stichprobenmenge ist, desto kleiner wird der relative Bereich $(\mathrm{k_{max}} - \mathrm{k_{min}})/\mathrm{n}$, so dass eine Entscheidung für die Richtigkeit der einen oder der anderen Nullhypothese mit steigendem n immer zuverlässiger wird.